ANALISI MATEMATICA T-2 (C.d.L. Ing. per l'ambiente e il territorio)

A.A.2009-2010 - Università di Bologna - Prof. G.Cupini

Esercizi sulle funzioni di due variabili: parte II

(Grazie agli studenti del corso che comunicheranno eventuali errori)

Esercizio 11.

Determinare i punti di massimo e di minimo relativi di

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2.$$

Scrivere il polinomio di Taylor del second'ordine di f nel punto $(1,-2)$.

Esercizio 12.

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$, deteminare i punti critici di f, e, tra questi, i punti di massimo e di minimo relativi. Scrivere lo sviluppo di Taylor del second'ordine di f con resto di Peano nel punto $(1,0)$.

Esercizio 13.

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3y - yx + \frac{1}{3}y^2.$$

Determinare le derivate direzionali e i punti di massimo e di minimo relativi.

Esercizio 14.

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \arctan\frac{y^2}{x}.$$

Determinare il dominio e i punti di massimo e di minimo relativi.

Esercizio 15.

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2(y-2)$,

(a) determinare le curve di livello di f e disegnarle su un piano cartesiano,
(b) studiare il segno di f,
(c) deteminare i punti critici di f, e, tra questi, i punti di massimo e di minimo relativi.
(d) studiare la continuità, la differenziabilità di f,
(e) determinare le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0,y_0)$, per $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ e per qualunque direzione λ,
(f) determinare il piano tangente al grafico nel punto $(1,-2,f(1,-2))$

Esercizio 16.

Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$, $f : A \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) := x^2 - y^2.$$

Determinare $f(A)$.

Esercizio 17

Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x - 1 \leq y \leq (x-1)^2\},\ f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := xy - x^2.$$

Determinare i punti i massimo e di minimo assoluti e l'immagine $f(A)$.

Esercizio 18.

Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Determinare i punti i massimo e di minimo assoluti e l'immagine $f(A)$.

Esercizio 19.

Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, 3 - x + y \geq 0\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x^2 + x(y - 1) + y + y^2.$$

Determinare i punti i massimo e di minimo assoluti e l'immagine $f(A)$.

Esercizio 20.

Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\},\ f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x^2 + 2y^2.$$

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti di massimo e di minimo assoluti e $f(A)$.

Esercizio 21.

Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},\ f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x^2 y.$$

Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti e $f(A)$.

Esercizio 22.

Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili. Derivare le seguenti funzioni composte rispetto alla variabile t:

1) $f(t, t^3)$, 2) $f(\log t, \sin t)$, 3) $f(g(t), 1 - t^2)$, 4) $f(-\sqrt{t}, g^2(t))$,

5) $f(\cos(g(t)), \arctan t)$, 6) $f(g(2t), g^2(t))$, 7) $f(1 + g(1 + 3t), \dfrac{1}{g(\sqrt{t})})$, 8) $f(t + g(t), \log_2 t)$.

Esercizio 23.

Classificare e disegnare le seguenti superfici:

1) $x^2 + 2y^2 = z^2$, 2) $z - \frac{1}{2}x^2 - 9y^2 = 0$, 3) $1 - z^2 = x^2 + 2y^2$, 4) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$,

5) $x^2 + 4y^2 = 2$, 6) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$, 7) $x^2 - 1 = 2y^2 + z^2$, 8) $x = 2y^2 - z^2$,

9) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Suggerimenti e/o soluzioni

Esercizio 11.

[Sol.: f è derivabile e $\nabla f(x,y) = (2x+y, x+4y)$ e quindi l'unico punto critico è $(0,0)$. La matrice hessiana è

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

quindi (per la condizione sufficiente del secondo ordine) $(0,0)$ è punto di minimo relativo. Il polinomio di Taylor in $(1,-2)$ è: $7 - 7(y+2) + \frac{1}{2}\left\{2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + 4(y+2)^2\right\}$.]

Esercizio 12.

[Sol.:f è derivabile e $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 2(x-y), 4y^3 + 2(x-y))$. I punti critici si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 2(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 2(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^3+y^3) = 0 \\ 4y^3 + 2(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 4y(y^2-1) = 0 \end{cases}$$

e si deduce che i punti critici sono $(0,0)$, $(1,-1)$ e $(-1,1)$. Usando la matrice hessiana (condizione sufficiente del secondo ordine)

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

si ottengono: $(1,-1)$ e $(-1,1)$ minimi. Per $(0,0)$ non si può concludere. Tuttavia, $f(0,0) = 0$ e dallo studio del segno si ha, restringendosi all'asse x, che $f(x,0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) < 0$ per $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$, mentre restringendosi alla bisettrice $y = x$: $f(x,x) = 2x^4 > 0$ per $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$. Dunque: sull'asse x il punto $(0,0)$ è un punto di massimo relativo, mentre sulla bisettrice $y = x$ $(0,0)$ è un punto di minimo relativo. Si conclude quindi che $(0,0)$ è un punto di sella.]

Esercizio 13.

[Sol.: $\nabla f(x,y) = (y(x^2-1), \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}y)$ per cui i punti critici sono $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Dallo studio della matrice hessiana (condizione sufficiente del secondo ordine) risulta che $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{3}, 0)$ sono punti di sella e che $(1,1)$, $(-1,-1)$ sono punti di minimo relativo.

Per le derivate direzionali: f è un polinomio, dunque è differenziabile. Ne segue che, posto $\lambda = (\alpha, \beta)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), \lambda \rangle = \langle (y(x^2-1), \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}y), (\alpha, \beta) \rangle = ...]$$

Esercizio 14.

[Sol.: Dominio: $A = \mathbb{R}^2 \setminus$ asse y.

$\nabla f(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y^2}{x}\right)^2}(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x})$. Dunque i punti dell'asse x, eccetto l'origine che non appartiene ad A, sono i punti critici, cioè i punti critici sono i punti $(x,0)$ con $x \neq 0$. Lo studio della matrice hessiana non è utile. Nei punti critici la funzione f vale 0. Studiando il segno di f osserviamo che nel primo e quarto quadrante la funzione f è positiva, nel secondo e terzo è negativa. Dunque, i punti $(x,0)$ con $x > 0$ sono punti di minimo relativi e i punti $(x,0)$ con $x < 0$ sono punti di massimo relativi.]

Esercizio 15.

[Sol.:

(a) Fissato $c \in \mathbb{R}$, le curve di livello

$$\mathcal{L}_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x,y) = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 2 + \frac{c}{x^2}\}.$$

(b) $f(x,y)=0$ se e solo se (x,y) è punto dell'asse y o della retta $y=2$.
$f(x,y)>0$ se e solo se (x,y) è punto del semipiano $y>2$ ma non sta sull'asse y.
$f(x,y)<0$ se e solo se (x,y) è punto del semipiano $y<2$ ma non sta sull'asse y.

(c) Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y)=(2x(y-2),x^2)$$

che si annulla per $x=0$. I punti critici sono tutti e soli i punti dell'asse y.

Poiché $f(0,y)=0$, si deduce dallo studio svolto in (b) che sono punti di minimo relativi i punti sull'asse y tali che $y>2$ (che sono "circondati" da punti in cui $f(x,y)\geq 0$); sono punti di massimo relativi i punti sull'assse y tali che $y<2$ (che sono "circondati" da punti in cui $f(x,y)\leq 0$). Il punto $(0,2)$ è di sella.

(d) f è un polinomio e quindi è differenziabile, per cui f è continua, derivabile ed esistono tutte le derivate direzionali.

(e) Dalla differenziabilità di f segue che, posto $\lambda=(\alpha,\beta)$.

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x_0,y_0)=\langle\nabla f(x_0,y_0),\lambda\rangle=\langle(2x_0(y_0-2),x_0^2),(\alpha,\beta)\rangle=2\alpha x_0(y_0-2)+\beta x_0^2.$$

(f) $z=f(1,-2)+f_x(1,-2)(x-1)+f_y(1,-2)(y+2)=-4-8(x-1)+(y+2)=...$]

Esercizio 16.

[Sol.: A è chiuso, limitato e connesso. $(0,0)$ è l'unico punto critico interno ad A e i punti estremanti relativi di f ristretta a ∂A sono $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$. Si verifica che i punti di massimo assoluto sono $(\pm1,0)$ e che il valore di massimo assoluto è $f(\pm1,0)=1$; analogamente, i punti di minimo assoluto sono $(0,\pm1)$ e il valore minimo assoluto è $f(0,\pm1)=-1$. Per il Teorema di Weierstrass e per il Teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha che $f(A)=[-1,1]$.]

Esercizio 17.

[Sol.: A è chiuso, limitato e connesso. $(0,0)$ è l'unico punto critico di f come funzione da $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}$, ma siccome non è interno ad A non va considerato. I punti estremanti relativi di f ristretta a ∂A sono $(1-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{3})$, $(1,0)$. Siccome $f(1-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{3})=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-1>-1=f(1,0)$ si ha che il punto di massimo assoluto è $(1-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{3})$ e il punto di minimo assoluto è $(1,0)$. $f(A)=[-1,\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-1]$.]

Esercizio 18.

[Sol.: A è chiuso, limitato e connesso. f non ha punti critci. Per quel che riguarda i punti estremanti relativi di f ristretta a ∂A essi sono $(\pm1,0)$ e $(\pm2,0)$. Confrontando il valore assunto in quei punti dalla f si ottiene che $(1,0)$ è punto di massimo assoluto e che il valore di massimo assoluto è 1, mentre $(-1,0)$ è punto di minimo assoluto e il valore di minimo assoluto è -1. Dunque, per il Teorema di Weierstrass e per il Teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha che $f(A)=[-1,1]$.]

Esercizio 19.

[Sol.: A è chiuso, limitato e connesso. f ha come unico punto critico $(1,-1)$ che è interno ad A. I punti estremanti relativi di f ristretta a ∂A sono $(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$, $(\frac{1}{2},0)$, $(0,-\frac{1}{2})$ (che sono candidati ad essere punti di minimo assoluto) e i punti $(0,-3)$ $(0,0)$, $(3,0)$ (che sono candidati ad essere punti di massimo assoluto). Confrontando il valore assunto in questi punti e nel punto critico da f si ottiene che $(0,-3)$ e $(3,0)$ sono i punti di massimo assoluti (6 è il valore di massimo assoluto) e $(1,-1)$ è il punto di minimo assoluto (-1 è il valore di minimo assoluto). Dunque, per il Teorema di Weierstrass e per il Teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha che $f(A)=[-1,6]$.]

Esercizio 20.

[Sol.: A è chiuso, limitato e connesso ed f è continua. Dunque, per il Teorema di Weierstrass e per il Teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha che $f(A)=$ [valore min, valore max].

Si ha
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$$
dove $F(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1$. Osserviamo che $\nabla F(x,y) = (2(x-1), 2y)$, che risulta $= (0,0)$ se e solo se $x = 1$ e $y = 0$, punto che non è appartenente ad A. Possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Se determiniamo gli (x,y) soluzioni di
$$\begin{cases} 2x = \lambda 2(x-1) \\ 4y = \lambda 2y \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{per qualche } \lambda \in \mathbb{R}$$
otteniamo i candidati ad essere punti di massimo e di minimo relativi. Risolvendo il sistema si ottengono il punto $(x,y) = (0,0)$ per $\lambda = 0$ e il punto $(2,0)$ per $\lambda = 2$. Non ci sono altri candidati. Siccome per il Teorema di Weierstrass esiste un punto di massimo e di minimo assoluto che debbono necessariamente essere tra i punti appena trovati. Si verifica che $f(0,0) = 0 < 4 = f(2,0)$. Dunque $(0,0)$ è punto di minimo assoluto, $(2,0)$ è punto di massimo assoluto e $f(A) = [0,4]$.]

Esercizio 21.

[Sol.: A è chiuso, limitato e connesso ed f è continua. Dunque, per il Teorema di Weierstrass e per il Teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha che $f(A) = [\text{valore min, valore max}]$. I punti critici interni ad A sono i punti $(0,y)$ con $-1 < y < 1$. Per determinare i candidati ad essere punti di max e min assoluti che giacciono su ∂A usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (l'alternativa è studiare $f(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi)$). Si ha
$$\partial A = \{(x,y) \,:\, F(x,y) = 0\},$$
dove $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Siccome $\nabla F(x,y) = (0,0)$ solo per $x = 0$, $y = 0$ che non e' in ∂A possiamo applicare il metodo. Risolvendo
$$\begin{cases} 2xy = \lambda 2x \\ x^2 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
si ottengono: $(0, \pm 1)$ per $\lambda = 0$, $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$ per $\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}$ e $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$ per $\lambda = -\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Un confronto tra i valori assunti da f in tutti questi punti e nei punti critici interni ad A permette di affermare che i punti di massimo assoluto sono $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$ e che i punti $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$ sono di minimo assoluto. L'immagine è $[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$.
]

Esercizio 22.

[Sol.: 1) $f_x(t, t^3) + f_y(t, t^3)3t^2$,

2) $f_x(\log t, \sin t)\frac{1}{t} + f_y(\log t, \sin t)\cos t$,

3) $f_x(g(t), 1-t^2)g'(t) + f_y(g(t), 1-t^2)(-2t)$,

4) $f_x(-\sqrt{t}, g^2(t))\left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) + f_y(-\sqrt{t}, g^2(t))2g(t)g'(t)$,

5) $f_x(\cos(g(t)), \arctan t)\left(-\sin(g(t))g'(t)\right) + f_y(\cos(g(t)), \arctan t)\frac{1}{1+t^2}$,

6) $f_x(g(2t), g^2(t))g'(2t)2 + f_y(g(2t), g^2(t))2g(t)g'(t)$,

7) $f_x(1 + g(1+3t), \frac{1}{g(\sqrt{t})})g'(1+3t)3 + f_y(1 + g(1+3t), \frac{1}{g(\sqrt{t})})\frac{-1}{g^2(\sqrt{t})}g'(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}}$,

8) $f_x(t + g(t), \log_2 t)(1 + g'(t)) + f_y(t + g(t), \log_2 t)\frac{1}{t\log_e 2}$.]

Esercizio 23.

[Sol.: 1) cono, 2) paraboloide ellittico, 3) ellissoide 4) cono circolare retto avente asse y come asse di simmetria, 5) cilindro orientato lungo l'asse z, 6) ellissoide, 7) iperboloide a due falde orientato lungo l'asse x, 8) paraboloide iperbolico (sella) con asse x perpendicolare alla sella, 9) sfera]